数理解析研究所講究録
第 1584 巻 2008 年 149-161

N 人非協力ゲームに対するロバスト Nash 均衡

京都大学・情報学研究科 西村 亮一 (Ryoichi Nishimura)
林 俊介 (Shunsuke Hayashi)
福島 雅夫 (Masao Fukushima)
Graduate School of Infomatics, Kyoto University

1 序論

本稿では，ゲームのルールについてプレイヤーが不完全な知識しか持たない情報不完備ゲームを考える．情報不完備ゲームに対しては，Aghassi and Bertsimas [1] や Hayashi, Yamashita, and Fukushima [10] が，確率分布を用いないモデルを提案している．彼らのモデルでは，各プレイヤーがロバスト最適化 [4, 5] を行うことにより自分の戦略を決定することが仮定されている．ここで，ロバスト最適化とは，不確実なパラメータを含むが，そのパラメータが少なくともある範囲内（不確実性集合）に入っていることが期待できる最適化問題に対して，その範囲内で起こり得る最悪のケースを想定して最適化を行うものである．各プレイヤーがロバスト最適化を行った結果起こり得る均衡状態をロバスト Nash 均衡という．また，そのような均衡点を求める問題をロバスト Nash 均衡問題という．Hayashi ら [10] は，双行列ゲームに対してロバスト Nash 均衡の概念を定義した．彼らは，適当な仮定の下で，各プレイヤーの解くべき最適化問題を二次錐計画問題（Second-Order Cone Programming : SOCP） [2] として再定式化し，その結果，ロバスト Nash 均衡問題が二次錐相補性問題（Second-Order Cone Complementarity Problem : SOCCP）に帰着されることを示した．本稿では，Hayashi [10] らの取り扱った問題を拡張して，N 人非協力ゲームに対するロバスト Nash 均衡の概念を定義する．特に，解の存在性を示すにあたって，Aghassi ら [1] や Hayashi ら [10] は，各プレイヤーのコスト関数（利得関数）が自分の戦略に対して線形な場合のみを考えたが，本稿ではコスト関数が自分の戦略に関して凸な関数を考える．そして，適当な仮定の下で，ロバスト Nash 均衡解が一意に存在することを示す．また，Hayashi ら [10] が提案した手法を用いて，各プレイヤーのコスト関数が自分の戦略に関して 2 次の項を含むようなロバスト Nash 均衡問題を SOCCP に再定式化する．

本稿を通じて，以下の表記法を用いる．集合 X に対して，X のすべての部分集合の集合を $\mathcal{P}(X)$ と表す．$\Re^n_+$ は各成分が非負であるような n 次元実ベクトルの集合を表す．すなわち，$\Re^n_+ := \{x \in \Re^n \mid x_i \geq 0\ (i = 1, \ldots, n)\}$ である．ベクトル $x \in \Re^n$ に対して，$\|x\| := \sqrt{x^\top x}$ はユークリッドノルムを表す．行列 $M \in \Re^{n\times m}$ に対して，$\|M\|_F := (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (M_{ij})^2)^{1/2}$ はフロベニウスノルムを表す．

2 定式化

本稿では，N 人のプレイヤーが，それぞれ自らのコスト関数を最小化しようとする非協力ゲームを考える．各プレイヤー $i \in \{1, \ldots, N\}$ に対して，$x^i \in \Re^{m_i}$ をプレイヤー i の戦略，集合 $S_i \subseteq \Re^{m_i}$ を許容戦略集合，$f_i : \Re^{m_1} \times \cdots \times \Re^{m_N} \to \Re$ をコスト関数とする．また，表記を簡単にするために，以下の記号を導入する．

$$x := (x^j)_{j=1}^N, \quad x^{-i} := (x^j)_{j=1, j\neq i}^N, \quad m := \sum_{i=1}^N m_i$$

$$m_{-i} := m - m_i, \quad S := \prod_{i=1}^{N} S_i, \quad S_{-i} := \prod_{j=1, j\neq i}^{N} S_j$$

情報完備の前提が満たされるならば，各プレイヤー i は他の $N-1$ 人のプレイヤーの戦略 x^{-i} を固定した次の最小化問題を解くことによって，自らの戦略を決定する．

$$\begin{array}{ll} \underset{x^i}{\text{minimize}} & f_i(x^i, x^{-i}) \\ \text{subject to} & x^i \in S_i \end{array} \tag{1}$$

各プレイヤー $i \in \{1, \dots, N\}$ に対して，$\bar{x}^i \in \operatorname{argmin}_{x^i \in S_i} f_i(x^i, \bar{x}^{-i})$ が成り立つとき，点 $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^N)$ を Nash 均衡解と呼ぶ．すなわち，各プレイヤーがそれぞれ戦略 $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^N$ をとるとき，どのプレイヤーも戦略を変える動機を持たないことを意味する．Nash 均衡解の概念が意味をもつためには，各プレイヤーが自分以外の $N-1$ 人の相手の戦略，あるいは，自分のコスト関数を正確に評価できなければならない．しかし，実際の問題においては，時間による変化や推定誤差などのため，情報に不確実性が存在する．そこで本稿では，不確実な情報をもったゲームを考える．

以下では，不確実な情報をもつ N 人非協力ゲームに対して，ロバスト Nash 均衡解を定義する．各プレイヤー $i \in \{1, \dots, N\}$ がとる行動に対して次の 3 つの前提条件が成り立っているものとする．

1. プレイヤー i のコスト関数は，パラメータ $u^i \in \Re^{\nu_i}$ に依存して，$f_i^{u^i} : \Re^{m_i} \times \Re^{m_{-i}} \to \Re$ と表される．しかし，プレイヤー i はそのパラメータ u^i を厳密には推定できず，空でない集合 $U_i \subseteq \Re^{\nu_i}$ に含まれていると予想する．
2. プレイヤー i は他の $N-1$ 人のプレイヤーの戦略 x^{-i} を正確に知っているが，実際にコスト関数の値が計算されるときには，他者の戦略は $x^{-i} + \delta x^{-i}$ のように δx^{-i} だけの「ずれ」を含んだ形で評価される．しかし，プレイヤー i は δx^{-i} の値を事前に知ることはできず，$\hat{x}^{-i} := x^{-i} + \delta x^{-i}$ が，空でない集合 $X_{-i}(x^{-i})$ に含まれていると予想する．
3. プレイヤー i は条件 1,2 の下で起こり得る最悪のケースを想定し，そのコストを最小化しようとする．

このとき，プレイヤー i が想定する最悪のコストを表す関数 $\tilde{f}_i : \Re^{m_i} \times \Re^{m_{-i}} \to (-\infty, +\infty]$ は次のように定義できる．

$$\tilde{f}_i(x^i, x^{-i}) := \sup\{f_i^{\hat{u}^i}(x^i, \hat{x}^{-i}) \mid \hat{u}_i \in U_i, \hat{x}^{-i} \in X_{-i}(x^{-i})\} \quad (i = 1, \dots N) \tag{2}$$

さらに，各プレイヤー $i \in \{1, \dots, N\}$ が解くべき最小化問題は以下で表される．

$$\begin{array}{ll} \underset{x^i}{\text{minimize}} & \tilde{f}_i(x^i, x^{-i}) \\ \text{subject to} & x^i \in S_i \end{array} \tag{3}$$

以上の準備の下で，ロバスト Nash 均衡解を定義する．

定義 2.1. 関数 $\tilde{f}_i$ が (2) で定義されているとする．さらに，ある戦略の組 $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^N) \in S_1 \times \cdots \times S_N$ が，$\bar{x}^i \in \operatorname{argmin}_{x^i \in S_i} \tilde{f}_i(x^i, \bar{x}^{-i})$ $(i = 1, \dots, N)$ を満たしている，すなわち，ゲーム (3) の Nash

均衡解になっているとする．このとき，戦略の組 $(\overline{x}^1,\dots,\overline{x}^N)$ をゲーム (1) のロバスト Nash 均衡解という．

3 ロバスト Nash 均衡解の存在

本節では，ロバスト Nash 均衡解が存在するための十分条件を与える．そのために，まず，点-集合写像の連続性を定義する [8, P.89]．なお，前節の前提条件 2 の中で与えられている $X_{-i}(\cdot)$ は，点-集合写像とみなせることに注意する．

定義 3.1.

1. 点-集合写像 $A:U\to\mathcal{P}(X)$ が点 $\overline{u}\in U$ のまわりで一様有界であり，さらに $u^k\to\overline{u}, x^k\to\overline{x}$ かつ $x^k\in A(u^k)(k=1,2,\dots)$ であるような任意の点列 $\{u^k\}\subseteq U,\{x^k\}\subseteq X$ に対して $\overline{x}\in A(\overline{u})$ が成立するとき，点 $\overline{u}$ において上半連続であるという．
2. 点-集合写像 $A:U\to\mathcal{P}(X)$ が $u^k\to\overline{u}\in U$ となる任意の点列 $\{u^k\}\subseteq U$ と $\overline{x}\in A(\overline{u})$ を満たす任意の点 $\overline{x}\in X$ に対して，$x^k\to\overline{x}$ かつ $x^k\in A(u^k)(k\geq k_0)$ であるような整数 $k_0>0$ と点列 $\{x^k\}\subseteq X$ が存在するとき，点 $\overline{u}$ において下半連続であるという．
3. 点-集合写像 $A:U\to\mathcal{P}(X)$ が $\overline{u}\in U$ において上半連続かつ下半連続であるとき，点 $\overline{u}$ において連続であるという．

さらに，点-集合写像 $A:U\to\mathcal{P}(X)$ が任意の $\overline{u}\in U$ であるとき，単に A は連続であるという．以下では，前節の条件 1,2 で与えられている $X_{-i}(\cdot)$ と U_i および関数 f^{u^i}，集合 S_i $(i=1,\dots,N)$ に対して，次の仮定が満たされているとする．

仮定 1.

(a) $G_i(x^i,x^{-i},u^i):=f_i^{u^i}(x^i,x^{-i})$ で定義される関数 $G_i:\Re^{m_i}\times\Re^{m_{-i}}\times\Re^{\nu_i}\to\Re$ は，任意の点 (x^i,x^{-i},u^i) で連続である．
(b) 任意の $x^{-i}\in\Re^{m_{-i}}$ において，点-集合写像 $X_{-i}:\Re^{m_{-i}}\to\mathcal{P}(\Re^{m_{-i}})$ は連続であり，$X_{-i}(x^{-i})$ は空でないコンパクト集合である．
(c) $U_i\subseteq\Re^{\nu_i}$ は，空でないコンパクト集合である．
(d) S_i は空でないコンパクト凸集合である．また，x^{-i},u^i を任意に固定したとき，関数 $f_i^{u^i}(\cdot,x^{-i}):\Re^{m_i}\to\Re$ は S_i 上で凸である．

この仮定 1(a)–(c) より，$\tilde{f}_i$ はすべての $(x^i,x^{-i})\in\Re^{m_i}\times\Re^{m_{-i}}$ において有限値をとり，連続となる．また，すべての $i\in\{1,\dots,N\}$ に対して次の補題が成り立つ．証明は簡単なので省略する．

補題 3.1. 仮定 1 が成り立つとする．このとき，任意に固定した $x^{-i}\in S_{-i}$ に対して，関数 $\tilde{f}_i(\cdot,x^{-i}):\Re^{m_i}\to\Re$ は S_i 上で凸である．

次の補題は，N 人の非協力ゲームに対するよく知られた結果である．

補題 3.2. [3, Theorem 9.1.1] N 人の非協力ゲームにおいて，各プレイヤー $i\in\{1,\dots,N\}$ のコスト関数 $\theta_i:\Re^{m_i}\times\Re^{m_{-i}}\to\Re$ が任意の点 $(x^i,x^{-i})\in S_i\times S_{-i}$ において連続であり，さらに $x^{-i}\in S_{-i}$

を任意に固定したとき，関数 $\theta_i(\cdot, x^{-i})$ が S_i 上で凸であるとする．また，戦略集合 S_i は，空でないコンパクト凸集合であるとする．そのとき，このゲームは少なくとも一つの Nash 均衡解をもつ．

この 2 つの補題から，ゲーム (1) におけるロバスト Nash 均衡解の存在定理が得られる．

定理 3.1. 仮定 1 が成り立つとする．このとき，ゲーム (1) は少なくとも一つのロバスト Nash 均衡解をもつ．

証明. 補題 3.1 より，$\tilde{f}_i(\cdot, x^{-i})$ は S_i 上で凸である．また，$\tilde{f}_i$ は連続関数である．よって，補題 3.2 から，ゲーム (3) は Nash 均衡解をもつ．これは，定義 2.1 から，ゲーム (1) が少なくとも一つのロバスト Nash 均衡解をもつことを示している． □

4 ロバスト Nash 均衡解の一意性

前節では，ロバスト Nash 均衡解が存在するための十分条件を考えた．しかし，情報完備ゲームにおける Nash 均衡解と同様，ロバスト Nash 均衡解は一般に複数存在し，そのすべてを知るのは困難である．ところが，情報完備ゲームにおける Nash 均衡解は，ある条件の下で一意に存在することが知られている．実際，Rosen [13] は各プレイヤーの利得関数が連続的微分可能な情報完備ゲームに対して，解が一意に存在するための条件を与えた．そこで示されている条件は，ゲームを等価な変分不等式問題（Variational Inequality Problem : VIP） [6] と呼ばれる問題に変換したときに，その VIP に含まれる写像が狭義単調性をもつことにほかならない．そこで，本節では，ロバスト Nash 均衡解が一意に存在するための十分条件について考える．具体的には，ロバスト Nash 均衡問題とそれぞれ等価な VIP を導く．次に，VIP に対する結果を用いて，ロバスト Nash 均衡解の一意性を考える．

各プレイヤーのコスト関数 $f_i^{u^i}$ は連続的微分可能であると仮定する．このとき，(2) で定義される $\tilde{f}_i$ が微分可能であれば，ロバスト Nash 均衡問題も Nash 均衡問題と同様に等価な VIP へと再定式化できる．しかし，たとえ $f_i^{u^i}$ が微分可能であっても，$\tilde{f}_i$ は微分可能であるとは限らない．そこで，微分不可能な凸関数に対して，劣微分写像と呼ばれる点-集合写像を定義し，ロバスト Nash 均衡問題を，ベクトル値写像の代わりに点-集合写像を用いた一般化変分不等式問題 (Generalized Variational Inequality Problem : GVIP) に再定式化することを考える．

一般化変分不等式問題 GVIP($\mathcal{F}, S$) とは，点-集合写像 $\mathcal{F}$ と空でない閉凸集合 S に対して，次のように定義される問題である [*1]．

$$\begin{array}{ll} \text{Find} & x \in S \\ \text{such that} & \xi \in \mathcal{F}(x) \\ & \langle \xi, y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in S \end{array} \tag{4}$$

GVIP についても VIP と同様，点-集合写像が以下で定義される狭義単調性をもつとき，解は存在すれば一意であることが知られている．

定義 4.1. 点-集合写像 $A : \Re^n \to \mathcal{P}(\Re^n)$ と空でない凸集合 $S \subseteq \Re^n$ が与えられているとする．こ

---

*1 $\mathcal{F}$ がベクトル値写像ならば，通常の VIP である．

のとき，任意の $x, y \in S\ (x \neq y)$ と $\xi \in A(x), \eta \in A(y)$ に対して，

$$\langle x - y, \xi - \eta \rangle \geq (>)\ 0$$

が成り立つならば，点-集合写像 A は S において単調（狭義単調）であるという．

定理 4.1. [7] 点-集合写像 $\mathcal{F} : \Re^n \to \mathcal{P}(\Re^n)$ が S において狭義単調であれば，GVIP(4) の解は，存在すれば一意である．

ロバスト Nash 均衡問題を GVIP に再定式化する．まず，凸関数に対して劣微分写像を定義する．

定義 4.2. 凸関数 $f : \Re^n \to \Re$ に対して，以下のように定義される集合 $\partial f(x) \subseteq \Re^n$ を f の点 x における劣微分という．

$$\partial f(x) = \{\xi \in \Re^n \mid f(y) - f(x) \geq \langle \xi, y - x \rangle\ (\forall y \in \Re^n)\}$$

劣微分写像とは，任意の点 $x \in \Re^n$ に関数 f の劣微分 $\partial f(x)$ を対応させる点-集合写像である．

点-集合写像 $\mathcal{F} : \Re^m \to \mathcal{P}(\Re^m)$ と集合 S を次のように定義すると，ロバスト Nash 均衡問題は GVIP(4) と等価になる．

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x) &:= \left(\partial_i \tilde{f}_i(x^i, x^{-i})\right)_{i=1,\dots,N} \\ S &:= S_1 \times \cdots \times S_N \end{aligned} \tag{5}$$

ここで，$\partial_i \tilde{f}_i$ は，プレイヤー i の戦略 x^i のみを変数と見たときの関数 $\tilde{f}_i$ の劣微分 $\partial_{x^i} \tilde{f}_i$ を意味している．

仮定 1 が成り立つとき，定理 3.1 よりロバスト Nash 均衡解が存在するので，それと等価な GVIP(4) にも解が存在する．したがって，定理 4.1 より，(5) で定義される点-集合写像 $\mathcal{F}$ が狭義単調であれば，ロバスト Nash 均衡解は一意に存在することがわかる．

次に，$\mathcal{F}$ が狭義単調となるための条件を与える．仮定 1 に加えて，次の仮定を満たす場合を考える．

仮定 2.

(a) 集合 U_i は唯一の要素からなる．

(b) コンパクト集合 $Y_{-i} \subseteq \Re^{m_{-i}}$ が存在して，$X_{-i}(x^{-i}) = x^{-i} + Y_{-i}$ と書ける．

(c) 任意に x^i を固定した関数 $f_i^{u^i}(x^i, \cdot) : \Re^{m_{-i}} \to \Re$ はアフィンである．すなわち，ある関数 $g_i : \Re^{m_i} \to \Re$, $h_i : \Re^{m_i} \to \Re^{m_{-i}}$ が存在して，$f_i^{u^i}(x^i, y^{-i}) := g_i(x^i) + h_i(x^i)^\top y^{-i}$ と書ける．さらに，任意の $y^{-i} \in Y_{-i}$ に対して，$\theta_i(x^i) := h(x^i)^\top y^{-i}$ で定義される関数 θ_i は S_i 上で凸である．

仮定 2(a) より，本節では，関数 $f_i^{u^i}$ $(i = 1, \dots, N)$ を単に f_i と書くことにする．また，仮定 2(b)(c) より，

$$\tilde{f}_i(x^i, x^{-i}) = \max_{\hat{x}^{-i} \in X_{-i}(x^{-i})} f_i(x^i, \hat{x}^{-i}) = f_i(x^i, x^{-i}) + \max_{\delta x^{-i} \in Y_{-i}} h_i(x^i)^\top \delta x^{-i} \tag{6}$$

と書くことができる．

補題 4.1. 仮定 2 が成り立っているとする．このとき，(7) で定義される F が狭義単調であれば，(5) で定義される点-集合写像 $\mathcal{F}$ も狭義単調である．

$$F(x) := \left(\nabla_i f_i(x^i, x^{-i})\right)_{i=1,\ldots,N} \tag{7}$$

以上の補題より，ロバスト Nash 均衡解の一意性に関する次の定理を得る．証明は [12] を参照のこと．

定理 4.2. 仮定 1 および仮定 2 が成り立つとする．このとき，(7) で定義される F が狭義単調であれば，ロバスト Nash 均衡解は一意に存在する．

5 ロバスト Nash 均衡問題の二次錐相補性問題への定式化

本節では，各プレイヤーが混合戦略をとり，各々のコスト関数が自分の戦略に関する凸 2 次関数で表されるゲームを考える．特に，コスト関数のパラメータや相手の戦略の評価値に対する不確実性集合がユークリッドノルムやフロベニウスノルムを用いて表せるようなある種のゲームに対して，ロバスト Nash 均衡問題が二次錐相補性問題（SOCCP）として定式化できることを示し，その解の存在性や一意性を議論する．

本稿では，次の二次錐相補性条件を満たすベクトル ζ を求める問題を考える．

$$\mathcal{K} \ni M\zeta + q \perp N\zeta + r \in \mathcal{K}, \quad C\zeta = d \tag{8}$$

ここで，$\zeta \in \Re^{l+\tau}$ は変数で，$M, N \in \Re^{l\times(l+\tau)}$, $q, r \in \Re^l, C \in \Re^{\tau\times(l+\tau)}, d \in \Re^\tau$ は定数である．また，$\mathcal{K}$ は，$\mathcal{K}^{l_j} = \{(\zeta_1, \zeta_2) \in \Re \times \Re^{l_j-1} \mid \|\zeta_2\| \le \zeta_1\}$ で定義される l_j 次元の二次錐 $\mathcal{K}^{l_j}$ を用いて $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{l_1} \times \mathcal{K}^{l_2} \times \cdots \times \mathcal{K}^{l_m}$ で定義される閉凸錐である．

本節では，各プレイヤー $i \in \{1, \ldots, N\}$ のコスト関数 f_i が行列 $A_i \in \Re^{m_i\times m_i}$, $B_{ij} \in \Re^{m_i\times m_j}$，および，ベクトル $c^i \in \Re^{m_i}$ を用いて，

$$f_i(x^i, x^{-i}) = \frac{1}{2}(x^i)^\top A_i x^i + (x^i)^\top \left(\sum_{j=1, j\ne i}^{N} B_{ij}x^j + c^i\right) \tag{9}$$

と表される場合を考える．以下では，行列 A_i は半正定値であるとし，戦略は混合戦略，すなわち戦略集合 S_i が

$$S_i = \{x^i \mid x^i \ge 0,\ e_{m_i}^\top x^i = 1\} \tag{10}$$

と表される場合を考える．ただし，$e_{m_i} = (1, 1, \ldots, 1)^\top \in \Re^{m_i}$ である．このとき，S_i は空でないコンパクト凸集合であることに注意する．

また，2 節で用いたコスト関数のパラメータ u^i は $\mathrm{vec}(A_i), \mathrm{vec}(B_{ij}), j = 1, \ldots, N, j \ne i$ および c^i を並べたベクトルと見なすことができる．ここで $\mathrm{vec}(\cdot)$ は m 個の列ベクトル $p_1^c, \ldots, p_m^c$ からなる行列 $P \in \Re^{n\times m}$ から nm-次元のベクトル $((p_1^c)^\top, \ldots, (p_m^c)^\top)^\top$ を生成するオペレーターである．

5.1 相手の戦略の評価に不確実性がある場合

この節では，各プレイヤーがコスト関数の値を計算するときに，その関数に含まれるパラメータは正確に推定できるが，$N-1$ 人の相手プレイヤーの戦略の評価値が不確実性を含む場合を考え

る．そこで，すべての $i \in \{1,\ldots,N\}$ に対して，次の仮定をおく．

仮定 3.
(a) $X_{-i}(x^{-i}) = \{x^{-i} + \delta x^{-i} \mid \|\delta x^j\| \le \rho_{ij},\ e_{m_j}^\top \delta x^j = 0\ (j \neq i)\}$
(b) $U_i = \{u^i\}$

仮定 3(a) において，条件 $e_{m_j}^\top \delta x^j = 0$ は，$e_{m_j}^\top (x^j + \delta x^j) = 1$ かつ $e_{m_j}^\top x^j = 1$ による．また，$\rho_{ij}(i,j = 1,2,\ldots,N, j \neq i)$ は与えられた非負の実数である．

この仮定の下で，次の定理が成り立つ．証明は [12] を参照のこと．

定理 5.1. 各プレイヤーのコスト関数と戦略集合がそれぞれ (9) と (10) で与えられ，仮定 3 が成り立つとする．このとき，ロバスト Nash 均衡解が少なくとも一つ存在する．

定理 5.2. 各プレイヤーのコスト関数と戦略集合がそれぞれ (9) と (10) で与えられ，仮定 3 が成り立つとする．そのとき，

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_{12} & \cdots & B_{1N} \\ B_{21} & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ B_{N1} & \cdots & \cdots & A_N \end{bmatrix} \succ O \tag{11}$$

が成り立つならばロバスト Nash 均衡解は一意である．

次に，ロバスト Nash 均衡問題が，SOCCP(8) に再定式化できることを示す．仮定 3 の下で，プレイヤー i が解くべき最小化問題 (3) の目的関数 $\tilde{f}_i$ を求める．$(x^i)^\top B_{ij}\delta x^j$ を最大化するベクトルは，$B_{ij}^\top x^i$ を超平面 $\pi_j := \{x^j \mid e_{m_j}^\top x^j = 0\}$ 上に射影したベクトル $(I_{m_j} - m_j^{-1} e_{m_j} e_{m_j}^\top) B_{ij}^\top x^i$ を大きさが ρ_{ij} に等しくなるよう定数倍することにより得られることに注意すると，

$$\tilde{f}_i(x^i, x^{-i}) = \frac{1}{2}(x^i)^\top A_i x^i + (x^i)^\top \sum_{j=1, j\neq i}^{N} B_{ij} x^j + c_i^\top x^i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \rho_{ij} \|\tilde{B}_{ij}^\top x^i\|$$

となる．ここで，$\tilde{B}_{ij} = B_{ij}(I_{m_j} - m_j^{-1} e_{m_j} e_{m_j}^\top)$ である．さらに，補助変数 $y_{ij} \in \Re$ を用いると，最小化問題 (3) は次の二次錐計画問題（SOCP）に書きかえられる．

$$\begin{array}{ll} \underset{x^i, y_{ij}}{\text{minimize}} & \frac{1}{2}(x^i)^\top A_i x^i + (x^i)^\top \sum_{j=1, j\neq i}^{N} B_{ij} x^j + c_i^\top x^i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \rho_{ij} y_{ij} \\ \text{subject to} & \|\tilde{B}_{ij}^\top x^i\| \le y_{ij}\ (j = 1,2,\ldots,N, j \neq i), \quad x^i \ge 0, \quad e_{m_i}^\top x^i = 1 \end{array} \tag{12}$$

SOCP(12) に対する KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 条件は次の SOCCP として表せる．

$$\mathcal{K}^{m_j+1} \ni \begin{bmatrix} \mu_{ij} \\ \lambda^{ij} \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{B}_{ij}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{ij} \\ x^i \end{bmatrix} \in \mathcal{K}^{m_j+1}\ (j = 1,2,\ldots,N, j \neq i)$$

$$\Re_+^{m_i} \ni x^i \perp A_i x^i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \left(B_{ij} x^j - \tilde{B}_{ij} \lambda^{ij} \right) + c^i + e_{m_i} s_i \in \Re_+^{m_i}, \quad e_{m_i}^\top x^i = 1$$

$$\mu_{ij} = \rho_{ij}\ (j = 1,\ldots,N, j \neq i)$$

ここで，$\lambda^{ij} \in \Re^{m_j}, s_i \in \Re$ はラグランジュ乗数で，$\mu_{ij} \in \Re$ は補助変数である．ロバスト Nash 均衡解では，各プレイヤー i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ についての KKT 条件が同時に成り立つ．これらの二次錐相補性条件をまとめるとロバスト Nash 均衡問題を SOCCP(8) に再定式化することができる．

5.2 コスト関数に不確実性がある場合

次に，各プレイヤーのコスト関数に含まれるパラメータのみに不確実性がある場合を考える．すべての $i \in \{1, \ldots, N\}$ に対して，次の仮定をおく．

仮定 4.

(a) $X_{-i}(x^{-i}) = \{x^{-i}\}$

(b) $U_i = D_{A_i} \times \prod_{j=1, j\neq i}^{N} D_{B_{ij}} \times D_{c^i}$

ここで，$D_{A_i} := \{A_i + \delta A_i \in \Re^{m_i \times m_i} \mid \|\delta A_i\|_F \leq \rho_{A_i}\}$，$D_{B_{ij}} := \{B_{ij} + \delta B_{ij} \in \Re^{m_i \times m_j} \mid \|\delta B_{ij}\|_F \leq \rho_{B_{ij}}\}, D_{c^i} := \{c^i + \delta c^i \in \Re^{m_i} \mid \|\delta c^i\| \leq \rho_{c^i}\}$ であり，$\rho_{A_i}, \rho_{B_{ij}}, \rho_{c^i} (i, j = 1, \ldots, N, j \neq i)$ は与えられた非負の実数である．

仮定 4 の下で，最小化問題 (3) の目的関数 $\tilde{f}_i$ は以下のように陽に書くことができる．

$$\tilde{f}_i(x^i, x^{-i}) = \frac{1}{2}(x^i)^\top (A_i + \rho_{A_i} I) x^i + (c^i)^\top x^i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \left((x^i)^\top B_{ij} x^j + \rho_{B_{ij}} \|x^i\| \|x^j\| \right) + \rho_{c^i} \|x^i\| \tag{13}$$

ここで，任意の $y \in \Re^n, z \in \Re^m, \rho \geq 0$ に対して，

$$\max_{\|M\|_F \leq \rho} y^\top M z = \max_{\|M\|_F \leq \rho} (z \otimes y)^\top \mathrm{vec}\,(M) = \|z \otimes y\| \rho = \rho \|y\| \|z\|$$

が成り立つことを用いた．なお，$\otimes$ はクロネッカー積を表す [11, Sections 4.2 and 4.3]．

仮定 4 の下で，以下の定理が成り立つ．証明は，[12] を参照のこと．

定理 5.3. 各プレイヤーのコスト関数と戦略集合がそれぞれ (9) と (10) で与えられ，仮定 4 が成り立つとする．このとき，ロバスト Nash 均衡解が少なくとも一つ存在する．

本定理では，3 節で議論したロバスト Nash 均衡解が存在するための仮定のうち，仮定 1(d) は必ずしも満たさなくてもよいことに注意する．実際，$A_i \succeq O$ であっても $A_i + \delta A_i \succeq O$ とは限らないので，任意の δA_i に対して，$x^{-i} \in S_{-i}$ を任意に固定した関数 $f_i^{u^i}(\cdot, x^{-i})$ は凸であるとは限らない．

次に，仮定 4 の下で，ロバスト Nash 均衡問題が SOCCP(8) に再定式化できることを示す．

今，$\tilde{f}_i$ は (13) 式で表されるので，補助変数 $y_i \in \Re$ を用いると，最小化問題 (3) は次の SOCP に書きかえられる．

$$\begin{array}{ll} \underset{x^i, y_i}{\text{minimize}} & \frac{1}{2}(x^i)^\top (A_i + \rho_{A_i} I) x^i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \left((x^i)^\top B_{ij} x^j + \rho_{B_{ij}} \|x^j\| y_i \right) + \rho_{c^i} y_i \\ \text{subject to} & \|x^i\| \leq y_i, \quad x^i \geq 0, \quad e_{m_i}^\top x^i = 1 \end{array} \tag{14}$$

さらに，SOCP(14) に対する KKT 条件は次式で表される．

$$
\mathcal{K}^{m_i+1} \ni \begin{bmatrix} y_i \\ x^i \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} \sum_{j=1,j\neq i}^{N} \rho_{B_{ij}} \|x^j\| + \rho_{c^i} \\ (A_i + \rho_{A_i} I)x^i + \sum_{j=1,j\neq i}^{N} B_{ij}x^j + e_{m_i}s_i - \lambda^i + c^i \end{bmatrix} \in \mathcal{K}^{m_i+1} \qquad (15)
$$

$$
\Re_+^{m_i} \ni \lambda^i \perp x^i \in \Re_+^{m_i}, \quad e_{m_i}^\top x^i = 1
$$

ただし，$\lambda^i \in \Re^{m_i}, s_i \in \Re$ はラグランジュ乗数である．ロバスト Nash 均衡解では，各プレイヤー $i \in \{1,\dots,N\}$ についての KKT 条件が同時に成り立つが，(15) は $\|x^j\|$ を含んでいるので，このままでは，SOCCP(8) の形には直せない．そこで，補助変数 $z_j \in \Re, u^j \in \Re^{m_j}$ を用いて次の SOCCP に書き直す．

$$
\mathcal{K}^{m_i+1} \ni \begin{bmatrix} y_i \\ x^i \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} \sum_{j=1,j\neq i}^{N} \rho_{B_{ij}} z_j + \rho_{c^i} \\ (A_i + \rho_{A_i} I)x^i + \sum_{j=1,j\neq i}^{N} B_{ij}x^j + e_{m_i}s_i - \lambda^i + c^i \end{bmatrix} \in \mathcal{K}^{m_i+1}, \quad e_{m_i}^\top x^i = 1
$$

$$
\Re_+^{m_i} \ni \lambda^i \perp x^i \in \Re_+^{m_i}, \quad \mathcal{K}^{m_j+1} \ni \begin{bmatrix} z_j \\ x^j \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} y_j \\ u^j \end{bmatrix} \in \mathcal{K}^{m_j+1} \ (j = 1,\dots,N, j \neq i) \qquad (16)
$$

よって，仮定 4 が成り立つならば，ロバスト Nash 均衡問題は，SOCCP(8) に再定式化することができる．

6 数値実験

本節では，具体的なゲームに対して前節で議論した二つのケースを考え，それらに対するロバスト Nash 均衡解を計算する．このとき，等価に再定式化した二次錐相補性問題 (SOCCP) は，[9] で提案されている平滑化法を元にしたアルゴリズムで解く．そして，不確実性集合の大きさを変化させていったとき，ロバスト Nash 均衡解がどのように変化するかを調べる．なお，本実験では，3.06GHz の CPU と 1GB のメモリをもつ計算機上で行い，アルゴリズムは MATLAB 7 を用いて実装した．一つめの実験では通常の Nash 均衡解が一意に存在するゲームを，二つめの実験では Nash 均衡解が複数存在するゲームを対象とする．

まず，以下の行列とベクトルによって定義されるコスト関数 (9) の場合を考える．

$$
A_1 = \begin{bmatrix} 27 & -4 & 9 \\ -4 & 18 & 0 \\ 9 & 0 & 19 \end{bmatrix}, \ B_{1,2} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 13 \\ -3 & -10 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \ B_{1,3} = \begin{bmatrix} -10 & 6 & 10 \\ -19 & 0 & -7 \\ 12 & -10 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
B_{2,1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 0 & -12 & -2 \\ 13 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 18 & -7 & 2 \\ -7 & 41 & 0 \\ 2 & 0 & 18 \end{bmatrix}, \ B_{2,3} = \begin{bmatrix} -4 & -9 & 1 \\ 0 & 5 & 12 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}
$$

$$
B_{3,1} = \begin{bmatrix} -7 & 17 & 10 \\ 7 & -4 & -13 \\ -10 & -10 & 0 \end{bmatrix}, \ B_{3,2} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -13 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} 24 & 9 & -17 \\ 9 & 28 & -5 \\ -17 & -5 & 31 \end{bmatrix}
$$

$$
c^1 = c^2 = c^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top
$$

このとき，Nash 均衡解 $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ は一意に存在し，

$$
\bar{x}^1 = (0.0000, 0.4967, 0.5033), \ \bar{x}^2 = (0.7036, 0.0000, 0.2964), \ \bar{x}^3 = (0.0831, 0.4304, 0.4866)
$$

である．さらに，ロバスト Nash 均衡解を計算するあたって，戦略の評価値のみに不確実性がある場合，すなわち，不確実性集合は U_i と $X_{-i}(x^{-i})$ $(i = 1, 2, 3)$ が，5.1 節の仮定 3 を満たすものを考える．ここで，パラメータはすべての $i, j = 1, 2, 3$ $(j \neq i)$ に対して $\rho_{ij} = k$ とし，$k = 0.05, 0.1, 0.2$ の三つの場合を考える．それぞれの k に対してロバスト Nash 均衡解を計算した結果を以下の表と図に示す．表 1 は各 k に対して得られたロバスト Nash 均衡解を示したものである．また，図 1 は，不確実性集合が大きくなるにつれて，均衡解がどのように変化するかを各プレイヤーごとにプロットしたものである．出発点は Nash 均衡解を表し，矢印で順次結ばれている点が $k = 0.05, 0.1, 0.2$ のときのロバスト Nash 均衡解である．横軸は均衡解における各プレイヤーの戦略の第 1 成分，縦軸は同じく第 2 成分である[*2]．この図より，不確実性集合の大きさを少しずつ変えていくと，ロバスト Nash 均衡解が連続的に動いていく様子が伺える．

表 1　異なる k に対するロバスト Nash 均衡解

k	ロバスト Nash 均衡解 $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$
0.05	((0.0000,0.5230,0.4770), (0.6978,0.0283,0.2738), (0.0394,0.4938,0.4668))
0.10	((0.0000,0.5348,0.4652), (0.6659,0.0244,0.3097), (0.0677,0.4521,0.4802))
0.20	((0.0000,0.5396,0.4604), (0.6100,0.0228,0.3673), (0.1162,0.3812,0.5026))

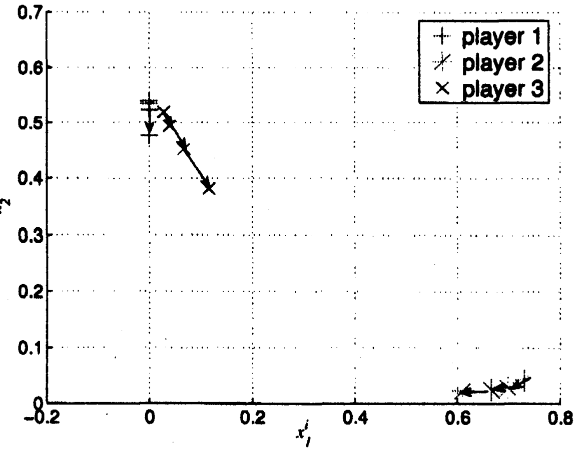

図 1　ロバスト Nash 均衡解における各プレイヤーの戦略の動き

次に，以下の行列及びベクトルによって定義される (9) を考える．

$$A_1 = \begin{bmatrix} 12.486 & 1.249 & 5.650 \\ 1.249 & 2.516 & 4.361 \\ 5.650 & 4.361 & 13.980 \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} -5.095 & -7.403 & -4.152 \\ -1.459 & -8.215 & -2.511 \\ -6.228 & -3.783 & -5.306 \end{bmatrix}, B_{13} = \begin{bmatrix} -8.250 & -8.514 & -7.015 \\ -8.178 & -2.222 & -1.091 \\ -2.004 & -5.367 & -4.486 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} -7.236 & -2.175 & -5.223 \\ -1.980 & -7.579 & -3.141 \\ -3.180 & -4.678 & -1.155 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2.064 & 3.041 & 3.228 \\ 3.041 & 6.563 & 2.341 \\ 3.228 & 2.341 & 14.720 \end{bmatrix}, B_{23} = \begin{bmatrix} -5.420 & -1.153 & -1.514 \\ -4.874 & -6.610 & -3.609 \\ -7.741 & -7.763 & -5.577 \end{bmatrix}$$

$$B_{31} = \begin{bmatrix} -2.338 & -2.981 & -6.197 \\ -7.629 & -4.076 & -4.096 \\ -5.475 & -6.967 & -6.298 \end{bmatrix}, B_{32} = \begin{bmatrix} -3.912 & -3.988 & -1.043 \\ -4.867 & -1.407 & -1.981 \\ -4.844 & -7.212 & -3.992 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 34.478 & -13.084 & -1.478 \\ -13.084 & 17.336 & -1.243 \\ -1.478 & -1.243 & 20.047 \end{bmatrix}$$

[*2] 各プレイヤーは混合戦略をとるので，第 1 成分と第 2 成分が決まれば，第 3 成分は自動的に決まることに注意する．

$$c^1 = c^2 = c^3 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^\top$$

このゲームに対して，次の三つの Nash 均衡解 $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ が存在する[*3].

解 1: $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ =((0.7152, 0.0108, 0.2739), (1.0000, 0.0000, 0.0000), (0.2337, 0.5006, 0.2658)),

解 2: $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ =((0.6714, 0.3040, 0.0246), (0.5958, 0.2082, 0.1960), (0.2084, 0.4564, 0.3352)),

解 3: $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ =((0.4896, 0.5104, 0.0000), (0.0000, 0.6879, 0.3121), (0.1952, 0.3596, 0.4432))

一方，ロバスト Nash 均衡問題を考えるにあたって，不確実性集合 U_i と $X_{-i}(x^{-i})$ $(i = 1, 2, 3)$ が，5.2 節の仮定 4 を満たすものとする．ここで，パラメータ $\rho_{A_i}, \rho_{B_{ij}}, \rho_{c^i}$ を次のように設定する．

$$\begin{bmatrix}\rho_{A_1} & \rho_{B_{12}} & \rho_{B_{13}} \\ \rho_{B_{21}} & \rho_{A_2} & \rho_{B_{21}} \\ \rho_{B_{31}} & \rho_{B_{32}} & \rho_{A_3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.01 + k & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 + k & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 & 0.01 + k\end{bmatrix}, \quad \rho_{c^1} = \rho_{c^2} = \rho_{c^3} = 0$$

さらに，$k = 0.1, 0.5, 1.0, 1.1485, 1.5$ の五つの場合に対してロバスト Nash 均衡解を求める．なお，本実験では，できるだけ多くの均衡解を求めることができるよう，等価な SOCCP を解く際に，初期点[*4]をランダムに 100 個とって，得られたすべての解を出力する．その結果を以下の表と図に示す．表 2 は各 k に対して得られたロバスト Nash 均衡解をまとめたものである．また，図 2〜4 は，不確実性集合が大きくなるとき，均衡解がどのように変化するかを各プレイヤーごとにプロットしたものである．出発点が Nash 均衡解であり，次いで矢印で順に結ばれているのが，$k = 0.1, 0.5, 1.0, 1.1485, 1.5$ のときのロバスト Nash 均衡解である．横軸は戦略の第 1 成分，縦軸は同じく第 2 成分である．図 2〜4 より，三つの均衡解のうちの二つが k が大きくなるに従って，近づいていることがわかる．さらに，$k = 1.1485$ になると，二つの解がほぼ一致し，$k = 1.5$ のときはロバスト Nash 均衡解は一つしか得られなかった．

表 2　異なる k に対するロバスト Nash 均衡解

k		ロバスト Nash 均衡解 $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$
0.1	解 1:	((0.708, 0.020, 0.272), (1.000, 0.000, 0.000), (0.234, 0.499, 0.267))
	解 2:	((0.667, 0.294, 0.039), (0.608, 0.200, 0.193), (0.210, 0.457, 0.333))
	解 3:	((0.490, 0.510, 0.000), (0.000, 0.685, 0.315), (0.198, 0.360, 0.442))
0.5	解 1:	((0.684, 0.057, 0.259), (0.949, 0.0000, 0.051), (0.232, 0.491, 0.277))
	解 2:	((0.657, 0.252, 0.091), (0.660, 0.161, 0.179), (0.216, 0.460, 0.325))
	解 3:	((0.492. 0.508, 0.000), (0.000, 0.676, 0.324), (0.199, 0.363, 0.439))
1.0	解 1:	((0.658, 0.094, 0.249), (0.895, 0.000, 0.105), (0.231, 0.483, 0.286))
	解 2:	((0.650, 0.155, 0.195), (0.800, 0.059, 0.141), (0.226, 0.473, 0.301))
	解 3:	((0.493, 0.507, 0.000), (0.000, 0.666, 0.334), (0.201, 0.363, 0.436))
1.1485	解 1:	(0.6507, 0.1026, 0.2467), (0.8810, 0.0000, 0.1190), (0.2312, 0.4807, 0.2881)
	解 2:	(0.6507, 0.1027, 0.2466), (0.8809, 0.0001, 0.1190), (0.2312, 0.4807, 0.2881)
	解 3:	(0.4937, 0.5063, 0.0000), (0.0000, 0.6637, 0.3363), (0.2015, 0.3635, 0.4350)
1.5		(0.507, 0.493, 0.000), (0.052, 0.619, 0.329), (0.204, 0.372, 0.425)

[*3] 本実験では，通常の Nash 均衡解を求める際には，解を全列挙するアルゴリズム [14] を用いた．

[*4] 本実験で用いた SOCCP を解くアルゴリズムは反復法を用いているため，初期点を指定することができる．実際，SOCCP が複数の解をもつときには，初期点を変えると異なる解に収束することが期待できる．

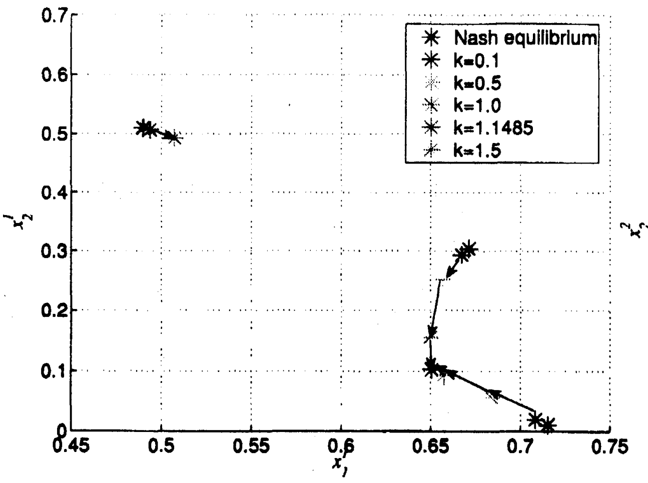

図 2　ロバスト Nash 均衡解におけるプレイヤー 1 の戦略の動き

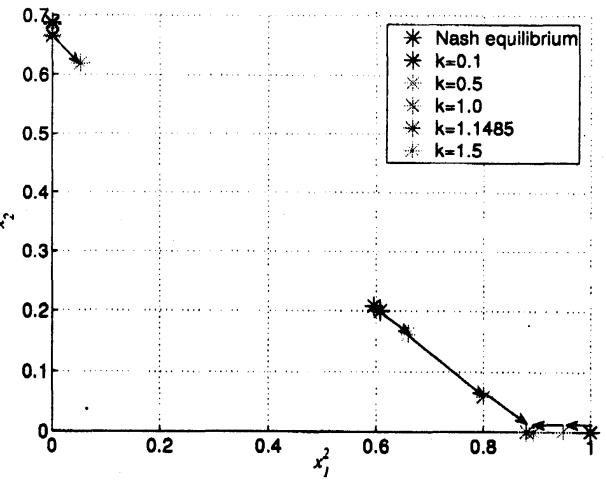

図 3　ロバスト Nash 均衡解におけるプレイヤー 2 の戦略の動き

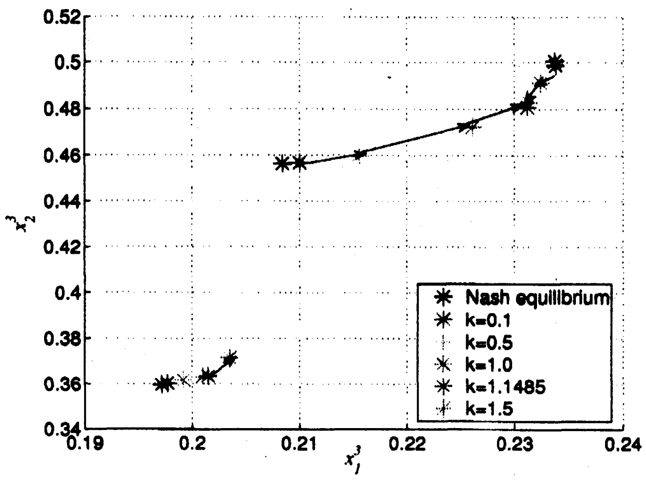

図 4　ロバスト Nash 均衡解におけるプレイヤー 3 の戦略の動き

7　結論

本稿では，まず，文献 [1, 10] 等で与えられているロバスト Nash 均衡の概念をより一般化し，プレイヤーの数が N 人で，各プレイヤーのコスト関数（利得関数）が自分の戦略に関して非線形な場合に対して，ロバスト Nash 均衡を定義した．さらに，コスト関数や戦略集合に対する凸性とコンパクト性の仮定のもとで，ロバスト Nash 均衡解が存在することを示した．さらに，ロバスト Nash 均衡問題を等価な一般化変分不等式問題に変換することにより，解が一意に存在するための十分条件を与えた．特に，各プレイヤーのコスト関数が二次の項を含み，不確実性を表す集合がユークリッドノルムやフロベニウスノルムを用いて表されるロバスト Nash 均衡問題を二次錐相補性問題として再定式化できることを示した．二次錐相補性問題に対するアルゴリズムを用いた数値実験を

行い，ロバスト Nash 均衡解の性質を調べた．

今後の課題としては，次のようなことが挙げられる．本稿では，ロバスト Nash 均衡解の一意性について，コスト関数の不確実性を考慮しない場合でかつ，Nash 均衡解が一意であるものを取り扱った．第一の課題はそれらの条件を緩和し，もっと広いクラスの問題に対して解が一意に存在することを示すことである．また，本稿では，ロバスト Nash 均衡問題を解く際は，不確実性が戦略の評価値のみにある場合と，コスト関数のパラメータのみにある場合だけを取り扱った．第二の課題は，戦略の評価値とコスト関数のパラメータの両方に不確実性がある場合でも，解を求められるようにすることである．

参考文献

[1] M. AGHASSI AND D. BERTSIMAS, *Robust game theory*, Mathematical Programming, 107 (2006), pp. 231–273.

[2] F. ALIZADEH AND D. GOLDFARB, *Second-order cone programming*, Mathematical Programming, 95 (2003), pp. 3–51.

[3] J.-P. AUBIN, *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1979.

[4] A. BEN-TAL AND A. NEMIROVSKI, *Robust convex optimization*, Mathematics of Operations Research, 23 (1998), pp. 769–805.

[5] ——, *Robust solutions of uncertain linear programs*, Operations Research Letters, 25 (1999), pp. 1–13.

[6] F. FACCHINEI AND J.-S. PANG, *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[7] S. C. FANG AND E. L. PETERSON, *Generailized variational inequalities*, Journal of optimization theory and applications, 38 (1982), pp. 363–383.

[8] 福島 雅夫, 非線形最適化の基礎, 朝倉書店, 2001.

[9] S. HAYASHI, N. YAMASHITA, AND M. FUKUSHIMA, *A combined smoothing and regularization method for monotone second-order cone complementarity problems*, SIAM Journal on Optimization, 175 (2005), pp. 335–353.

[10] ——, *Robust Nash equilibria and second-order cone complementarity problems*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 6 (2005), pp. 283–296.

[11] R. A. HORN AND C. R. JOHNSON, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[12] 西村 亮一, *N* 人非協力ゲームに対するロバスト *Nash* 均衡問題と解の一意性, 京都大学工学部情報学科数理工学コース 特別研究報告書, (2007).

[13] J. B. ROSEN, *Existence and uniqueness of equilibrium points for concave N-persons games*, Econometrica, 33 (1965), pp. 520–534.

[14] 高木 潤, 混合相補性問題に対する分枝限定法と双行列ゲームへの適用, 京都大学工学部情報学科数理工学コース 特別研究報告書, (2006).